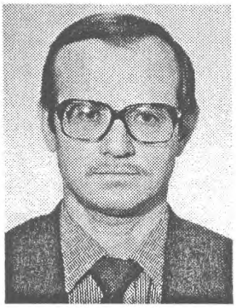

Вл. Д. Мазуров

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И РЕАЛЬНОСТЬ

Что мы можем знать

«Что мы можем знать?» – этот вопрос исследовал великий Кант. Наша цель более скромная: обсудить некоторые современные вопросы математического моделирования. Ведь модели объектов дают некоторое знание о них. Но проблема моделирования поневоле заставляет коснуться определенных общих вопросов, в том числе об итогах кибернетики, о перспективах искусственного интеллекта и новых информационных технологий. И это ведет к более общим проблемам, которые мы далее перечислим. Они существуют давно, но ввиду их фундаментального характера трудно ожидать какого-то близкого к окончательному их решения. На самом деле мы имеем вечные проблемы, но это не значит, что их не нужно обсуждать. Мы решали и решаем много практических задач в области экономики, техники, медицины и в других областях, применяя математические методы. «Мы» – это научные сотрудники нескольких отделов Института математики и механики, а также сотрудники УрГУ, это научная школа от основателей – члена-корреспондента С. Н. Черникова и академика Н. Н. Красовского. Но при решении этих задач, при всей их конкретике, возникают соображения более общего порядка – о смысле применяемых нами математических конструкций.

Я осознаю, что многое в данной статье спорно, но здесь и некие размышления, и приглашение к размышлениям.

Мы не знаем, не имеем «окончательного» ответа, что есть реальность, что есть математика, но имеем об этом какое-то представление. Более того, взяв Большой энциклопедический словарь, который по своей природе вынужден всему давать определения, мы с некоторым удивлением читаем, что математика – это попрежнему только наука о пространственных формах и количественных отношениях. С этим можно и согласиться, но только частично, осознавая в то же время, что математика далеко выходит за указанные рамки – достаточно вспомнить о математической логике, теории алгоритмов, об абстрактных структурах и пр.

Как математика связана с реальностью? Почему вообще возникают математические конструкции, все новые и новые? Если задаешь себе такой вопрос, то поневоле рискуешь очутиться на чужом поле, потому что нужен взгляд со стороны. «Чужое» (хотя и не совсем) для нас поле – это логика науки, где обсуждаются и пограничные с математикой вопросы. Мы, хоть и ненадолго, но окажемся в сфере рассуждений о том, о чем в логике для краткости говорят как об абсолютном, предельном, а этого не избежать, если говорить о причине математических конструкций (мы хотели бы понять самую первую основу).

Итак, с точки зрения логики можно себе представить в идеале, в пределе универсальную систему, которая знает все. Насколько мы можем себе представить, знание в этой системе – абсолютно полное и (это трудно выразить совершенно ясно) органичное. Оно не искусственно, не формально. Поэтому такая универсальная всезнающая система не нуждается в определениях, аксиомах, теоремах и т. п. Она не нуждается в конструкциях, как не нуждается в подпорках. А мы – нуждаемся. Мы их строим. Поэтому у нас есть математика. Упомянутой абсолютной всезнающей системе она не нужна. А мы никогда не будем обладать полным истинным знанием. Когда восхищаешься красотой некоторых математических построений, то сталкиваешься с неформальным, невыразимым. И это не знание, а чувство, обогащенное работой над конструкциями. Надо привести соответствующий пример – и я думаю, что все математики (и не только они) восхищались красотой, логической ясностью и продуктивностью евклидовой геометрии.

Мы всегда любили классическую геометрию, она нас воспитала, а теперь возникает новая геометрия, потому что между нами и действительностью все чаще обнаруживается посредник – это компьютер. Мы привыкаем смотреть на мир через компьютер. Компьютерный мир – это математические модели. Мы хотим, чтобы модели были хорошими. И они становятся все лучше. Многие из нас хотят увидеть «настоящую» реальность с помощью математических методов. Но что это значит – настоящую? – окончательно и бесповоротно уточнить это, кажется, невозможно. Мы рассмотрим для начала «только» такой вопрос: что значит – в рамках математической модели – «объект существует». Реально в наших силах расширить понятие существования так, чтобы оно годилось для моделей, где некоторый элемент x существует (в некотором содержательном смысле), хотя соответствующая совокупность соотношений, которому x удовлетворяет, не обязательно совместна. Эти модели – с противоречивыми системами соотношений – необходимо рассматривать хотя бы только потому, что на практике действительно математические модели часто бывают противоречивыми, – и не от небрежности, а по существу. И в этом случае прием зачисления таких моделей в число негодных для употребления не помогает. Это опять-таки следует из трудного практического опыта моделирования. Достаточно вспомнить задачи выбора эффективных вариантов в экономике.

Противоречивые модели тоже приходится анализировать. И поэтому понятие существования многозначно и многоаспектно. Противоречия часто возникают оттого, что мы мыслим совместно те сущности, которые совместны только в процессе, а не в статике. И один из способов развязки противоречий – введение параметра, от которого зависят высказывания (таким параметром может быть время или ситуация, пробегающая множество ситуаций).

Все дело в том, что для изучения содержательных вещей мы вынуждены их формализовать. Формальное же – это только форма, это пустое, бессодержательное. Формальное – это поверхностное. Формализовать неформализованное нельзя, можно только – для учета присутствия неформального – заменить его симуляцией, чисто внешней имитацией.

Неформальное – это немое, невыразимое, хаотическое. Мы заменяем содержательное поверхностным, потоком слов, структурами из пустых элементов. Диалоговые экспертные системы используют эту замену. Она позволяет обрабатывать знания.

Для достижения большего приближения к отражению реальности в информационных системах (хотя что это значит, опять-таки непонятно, мы будем рассматривать эту фразу как выражение нашего непонятного желания) нами предложены следующие конструкции в моделировании:

1. Класс обобщений понятия существования, связанный не только с непрерывными аппроксимациями противоречивых задач (такого сорта, как в методе наименьших квадратов), но и с дискретными аппроксимациями. Последние связаны, как показано нами, с обобщением понятия существования объектов и ситуаций. Соответствующие конкретные жизненные примеры имеются в большом числе, например, в задачах диагностики, прогнозирования и выбора в процедурах голосования в экономике, технике, медицине и в других сферах.

2. Необходимость и возможность работать с противоречивыми системами соотношений.

3. Широкое понимание двойственности и рефлексии в процедурах синтеза и анализа моделей.

4. Исследование новых аспектов теории индукции, связанных, в частности, с моделями выводимости следствий из данных и знаний на основе обобщенной двойственности. Двойственность – это целое широкое направление в математике: как правило, исходной модели сопоставляется сопряженная ей, в которой оцениваются факторы исходной модели.

5. Широкое применение и исследование методологии моделирования на основе распознавания образов и нейронных сетей.

Заметим: мы знаем в достаточной степени только то, что сами же и конструируем. Остальное – вещи в себе – о таких вещах мы имеем представление, но не имеем знания. И мы пустоты незнания заполняем волей, принятием решений, мостами конструкций между островками незнания. Так и с неформализованным, и с несобственным (противоречивым). При этом каждый раз, как мы останавливаемся на какой-то конкретной конструкции, которую ставим в соответствие некоей неформализованной или несобственной сущности, мы одновременно и открываем ее, делаем доступной и позитивной, и тут же скрываем ее, заменяя нашей конструкцией всю глубину ее содержания.

Понятие существования понимается нами в обиходном смысле или в духе реализма: существуют реальные вещи и события, и ситуации, но существуют и математические объекты (например, круг) как идеальные объекты. Существуют объекты, удовлетворяющие системе непротиворечивых предикатов. Все это только пояснение, формализовать понятие существования мы не будем – это дело специализированных работ.

Дело в том, что математическое моделирование (претендующее на адекватность и релевантность) неформальных содержательных представлений о сложных объектах и ситуациях, таких, например, как природно-технические, биомедицинские, социальные и др., требует некоторых изощрений в формально-логическом и индуктивном аппарате обработки знаний, это вынужденные изощрения, и потому они воспринимаются серьезно и основательно. Неформализованность задач моделирования, диагностики, прогнозирования, интерпретации данных, выбора вариантов планирования и управления объектами и процессами требует применения и обоснования нескольких и даже многих подходов, различных способов – формально-логического, индуктивного, ассоциативного и др. – обработки знаний. Здесь необходимы обобщения понятия существования объектов и процессов, нужны применения размытых логических кванторов, требуется разрабатывать и обосновывать различные формы диалога с экспертами, способы учета данных экспертиз и экспериментов, инструментировать обучающиеся процедуры обработки знаний. Следует заметить, что вообще при создании интеллектуальных систем поддержки решений все время приходится иметь в виду – стремясь к некоторому идеалу, достижимому лишь в некотором потенциально бесконечном процессе, – что необходим естественный гибрид трех методов обработки знаний: математических моделей (включая модели рассуждений и другие чисто математические построения), экспертиз и экспериментов, а также субстанциального анализа (формирования смысла математических конструкций, процессов понимания).

Однажды академик Н. Н. Красовский заметил, что математическую модель, образно говоря, можно назвать карикатурой на реальность. Она полезна, поскольку позволяет ухватить суть моделируемого объекта, считать характеристики объекта, прогнозировать его поведение. Но не всегда это возможно. И в 1950-х годах возник подход, альтернативный математическому моделированию, в его основе – метод проб и ошибок с добавлением инструментария обобщения опыта. Это привело к теории и методам распознавания образов. Это связано с обработкой экспертиз.

Уже достаточно давно, лет около 25, появились экспертные программные системы, а ближе к нашему времени – и более гибкие нейросетевые экспертные системы. В них формальные алгоритмы обработки знаний сопрягаются с экспертизами. Такие гибридные экспертные системы оказались весьма эффективными информационными технологиями. Но идея подобных комбинированных технологий уже содержалась в упомянутых моделях учета трудноформализуемых и внемодельных факторов в процессах математического программирования, в частности, в такой конкретной реализации этого направления, как процессы математического программирования, включающие распознавание. Это направление перспективно хотя бы потому, что заключает индуктивный вывод в строгие рамки аналитически определенных процессов. Однако понимание важности такого направления приходит лишь постепенно.

Вспоминается один разговор с известным специалистом в области аксиоматических систем описания процедур принятия решений. Он не понимал, почему недостаточно аксиоматики типа той, что есть в книге Люса и Райфы, а надо еще придумывать обобщения для противоречивых моделей. Ответ простой: он на практике не встречался с проблемами, где противоречивость имеется по существу (а тогда ее нельзя просто срелаксировать через более подробные разъяснения). Так сказать, «наука имеет много гитик», и математика – тоже.

Математика в научном познании

Время от времени активизируются споры о месте математики в науке, о ее роли в познании. Похоже на то, что при любой смене научной парадигмы этой смене сопутствует или даже предшествует математическая работа: готовятся математические методы, понятия, теории. Во всяком случае, таковы исторические факты. Один из самых поразительных фактов связан с творчеством Фалеса Милетского: он изобрел понятие математического доказательства, и это предшествовало его же изобретению философии. Можно углубиться в еще большую древность: математика сопровождает человека с самого зарождения цивилизации. Она в сжатой форме аккумулирует знание.

Историк науки наблюдает непрерывные формопреобразования в развитии идей математики.

Когда надоедают абстракции, нас успокаивают и освежают мысли о чем-то понятном и существенном. И крайне важно, что главное в математике – изучение чисел, а также познание геометрии мира. Но, отталкиваясь от этого, мы естественно переходим к более общим понятиям – понятиям порядка и другим логическим отношениям. Хорошо то, что эти обобщения реально работают, они повышают продуктивность математических методов и дают неожиданные результаты. Но загадка «непостижимой эффективности математики» остается загадкой.

Если обратиться к новейшей истории, то мы увидим, насколько поучительна судьба кибернетики.

Судьба идей кибернетики

Кибернетика – наука об управлении и связи. О природе информации. В дальнейшем – об обработке знаний. И в сущности это одно из направлений о человеческом знании и о технологиях. И как это было всегда, существенная часть обработки знаний в ходе развития кибернетики так и осталась неформализованной. Другого не могло и быть.

Взглянем на историю кибернетики. В узком собственном смысле это 36 лет – с 1948 по 1984 год. В 1948 году вышла книга Н. Винера «Кибернетика». С этого времени появилось множество математических моделей задач управления и связи. Некоторые считают – и для этого есть основания, – что, во-первых, кибернетика – наука об использовании компьютеров; во-вторых, это «советское» название информатики.

Потомки кибернетики – распознавание образов, искусственный интеллект, нейронные сети, computer science.

Оставшиеся после 1984 года проблемы изучаются и в дальнейшем – на более высоком уровне.

Комплекс идей кибернетики таков: теория управляемых динамических систем, исследование операций, системный анализ и системотехника, бионика, автоматы и алгоритмы, информатика.

После 1984 года спекуляции некоторых гуманитариев на кибернетике стали не модны, время требует деловых подходов. Кибернетика как первоначально не совсем определенная программа сошла со сцены, развивается математическая кибернетика. Это, в сущности, может быть понято как в основном дискретная математика, хотя многие модели связаны и с анализом. Некоторое отношение к этому имеет структурализм Н. Бурбаки. Сейчас это направление как фундаментальная наука включает в себя алгебру компьютерных наук; теорию управления; математическое программирование; распознавание образов и анализ изображений; информатику.

И теперь снова обратимся к содержанию понятия «кибернетика». Это наука об управлении и связи в сложных динамических системах. Кибернетика изучает структуру сообщений в организмах, машинах и сообществах, обработку и передачу информации. Процесс управления – средство поддержания порядка в среде или в объекте. Кибернетика опирается на понятие энтропии, на меру беспорядка в динамической системе.

Всем замкнутым системам угрожает рост энтропии. Но некоторые организмы, используя информацию и на ее основе организуя тонкие алгоритмы управления, могут на некоторое время противостоять росту энтропии. Кибернетика сыграла громадную роль в осмыслении роли математических моделей для сложных систем. Что же получилось в итоге?

Итоги кибернетики

Кибернетика занималась системами, умеющими понижать энтропию. Еще плоды кибернетики – информационные технологии, системы обработки знаний. Кибернетика дала новую пищу для размышлений философов. Ее развитием поставлены следующие фундаментальные вопросы: природа информации; природа интеллекта; алгоритмизуемость; самоорганизация.

Сейчас идет время посткибернетики. Мода на кибернетику прошла, денег на вольное моделирование не дают. Но проблемы остались – уже для серьезного исследования, для тяжелых работ.

К середине 1980-х годов кибернетический энтузиазм в его первоначальном наивном виде выдохся. Наступило время глубоких разработок – математических и программных. Начался (еще и много раньше) бум искусственного интеллекта. Вейценбаум, американский философ, предостерегал против романтизма в этом деле, против инструменталистского экспансионизма.

Интеллект – это способность к сознательной самоорганизации, возникающей из способности к обобщению, выбору и предвидению и выражающейся в целесообразности и планомерности предпринимаемых действий.

Искусственный интеллект берет на себя этапы рутинной обработки данных и знаний, блоки работы общения человека с машиной. Он берет на себя некоторые шаги обработки постановок задач. Проблема: есть ли какое-то творчество в работе искусственного интеллекта, есть ли элементы неформализованных процедур.

Черты искусственного интеллекта, которые напоминают неформальную работу: моделирование, которое носит признаки искусства, выбор методов, обоснование методов, логический вывод. Элементы творчества – в эволюционном программировании, в самонастраивающихся, самообучающихся системах моделирования. Эти элементы – и в использовании языков имитационного программирования, в учете внемодельных факторов.

В этой сфере важна теория алгебраических моделей, вообще структуралистский подход – он позволяет идентифицировать неизвестные блоки моделей. Модели рассматриваются как гомоморфизмы. Используются фреймы. А если реальность не втискивается во фреймы, то идет работа с неформализованными и противоречивыми моделями.

Все эти идеи в каком-то смысле вечны. Линия вычислимости рассуждений (в том числе даже, например, моральных) – от «протокибернетика» Сократа, затем Платон придал этому тезису эпистемологический характер. Далее Лейбниц, затем развитие математической логики... Изучение сущности языка: его и рамочная, и внерамочная природа.

И кажется, что вопрос об искусственном интеллекте – это вопрос об естественном интеллекте.

Х. Дрейфус применил к анализу возможностей кибернетики и искусственного интеллекта тяжелую артиллерию феноменологии. Его книга «Чего не могут вычислительные машины» чрезвычайно полезна: в ней дан глубокий философский анализ по разграничению трансцендентного и формализуемого.

Итак, проблема – в пределах формализации. В кибернетике идея была в том, чтобы обнаруживать везде и улучшать информационные и управленческие процессы. То, что есть в природе и в человеке, перенести в технику и сделать более гибкие технологии. И основные проблемы – компьютеры и мышление. Доверие к компьютерам.

Ионеско о формализации сказал: «Не все невозможно выразить словами, а только живую истину».

Человек больше, чем система обработки информации. Есть внеструктурное, внемодельное. Внетекстовое, которое надо расшифровывать. Иначе говоря, всегда есть незначкуемый остаток. В нем и скрывается существенное, трансцендентное, экзистенциальное. И эти две области – формализованная и неформальная – все время контактируют. Кибернетика есть этап этого диалога.

Практически искусственный интеллект – это экспертные системы, распознавание образов, нейронные сети. Искусственный интеллект направлен на реализацию в компьютерах восприятия, дедуктивного, индуктивного и эвристического мышления, принятия решений на основе диагностики, планирования и прогнозирования, целеполагания и целенаправленного поведения. Надо уметь использовать неявное. Скрытое знание и неформализованные элементы моделей. Это возможно при использовании распознавания образов.

Сейчас одна из наиболее важных областей математики – компьютерные науки. Это фактически прикладная алгебра. И даже само понимание бесконечности воспринимается сквозь призму компьютера. Можно работать со столь большими множествами чисел, что в какой-то мере отпадает необходимость в идеализации понятия «большое». Много новых проблем появилось при использовании компьютеров в экономике.

Математика и экономика

Есть социально обусловленное сопротивление математике – и оно наблюдается одновременно с процессами привлечения математики к исследованиям, с почитанием математики. И то, и другое – это устойчивая эмпирическая закономерность. Это наблюдается и в экономике.

Математическая экономика как экономическая теория, представленная в наиболее рационализированном виде, с привлечением строгой дедукции, в общей и достаточно абстрактной теоретической форме, изучает динамику и равновесие в процессах производства и распределения благ. Традиционный математический аппарат в этой сфере – выпуклый анализ, линейное и нелинейное программирование, реляционная алгебра (заметим, что линейная алгебра так же, как математический анализ и аналитическая геометрия, – это просто обиходный язык, на котором постоянно приходится говорить при изложении материала). Основные задачи экономики с абстрактной точки зрения представляются как математические задачи выбора и диагностики, оценки и прогнозирования ситуаций. Эти задачи осложнены наличием неформализованных факторов и противоречивости критериев выбора.

При современном состоянии теории и потребностях мониторинга реальных ситуаций в экономике необходимы информационные технологии обработки данных и знаний, автоматизация обнаружения эмпирических закономерностей, методы оптимального выбора и диагностики состояний экономических систем.

Динамика состояний сложных экономических систем часто является нелинейной, а ее прогнозирование в принципе неоднозначно. Дело в том, что эта динамика имеет неустойчивые тенденции, она генерируется взаимодействием противоречивых и часто неформализованных факторов. Поэтому мы рассматриваем нестационарные модели мониторинга, эффективного выбора вариантов и диагностики как адекватный аппарат для анализа и моделирования таких систем. Это модели динамики и равновесия, в которых ведущую роль играют понятия обобщенных решений для неформализованных и противоречивых задач математической классификации и оптимизации. Важна теория двойственности в оптимизации: она позволяет объективно исследовать ценности экономических факторов.

Один из важнейших разделов экономической теории – пространственно-временное размещение и развитие человеческой деятельности. К пространственным аспектам прибегают, например, при решении производственно-транспортных задач. А если мы говорим о времени, то принципиально важно планировать будущее. Сюда относятся как задачи прогнозирования, так и многие задачи финансовой математики. С точки зрения математической экономики – как экономической теории – в сфере финансовой торговли нас интересуют динамика и равновесие состояний рынка. Заметим, что в общих моделях равновесие на финансовом рынке – того же типа, что и равновесие между фирмами и потребителями в модели Вальраса – Эрроу – Дебре. Только в список производимых и потребляемых благ попадают еще и активы, за которыми стоят будущие продукты. При этом здесь велика роль неопределенности, так что речь идет об управлении рисками. Подходящий аппарат – теория стохастических игр.

В заключение отметим проблему: как относиться к математике в экономике – как к чисто инструментальной составляющей или как к разделу экономической теории. Здесь не надо быть экстремистом – ведь речь идет о взаимодействии представителей различных специальностей, и это тоже проблема равновесия. Как бы ни был увлечен своим предметом математик, он должен ясно понимать, что экономика не сводится к математике, все гораздо сложнее. Хотя без математики представить современную экономику немыслимо.

Хотя Европа для нас может представлять лишь ограниченный интерес для подражания – наша система образования (особенно в области математики) пока еще лучше, но тем не менее полезно заметить, что, например, в Германии преподаваемая экономика – это, на первый взгляд, сплошная математика.

В последнее десятилетие в науке и образовании в России появились новые акценты. И некоторые из них можно оценить как позитивные. Стало ясным, что оценка исследований и образования делается с прагматических позиций, с точки зрения реалий и потребностей. Явным стало давление фактора ограниченности ресурсов, более жесткими стали требования к обоснованию новых проектов, осознаются и вненаучные ценности. Прагматизм общества делает осознание важности образования более прозрачным и многомерным. Все эти особенности еще более ярко проявляются на общем фоне становления информационной цивилизации.

Однако не следует целиком полагаться только на объективные процессы. Качественное образование основывается на личной активности преподавателей и студентов, оно имеет ярко выраженный субъективный характер. И у студентов необходимо воспитывать познавательную и творческую активность, самостоятельность в мышлении и принятии решений, и в связи с этим следует особо подчеркнуть принципиальное значение математики – она требует настоящего труда и практически несовместима с расплывчатыми рассуждениями и халтурой. Правильно поставленное обучение математическим дисциплинам ориентирует студентов на самостоятельное активное участие в выработке культурных ценностей и на строгое обоснование решений. Тем более сейчас, когда решения принимаются со всей серьезностью и в условиях наличия неклассических факторов.

Отметим громадную роль неустойчивости и хаоса в глобализирующейся экономике как источник новых творческих задач.

Конкретный пример: работы в рамках гранта РФФИ – Урал

Тема данного проекта является комплексной: модельное, алгоритмическое и программное обеспечение задач социально-экономической идентификации территорий.

В числе исполнителей – академик РАН И. И. Еремин, доктора и кандидаты наук Вл. Д. Мазуров, М. Ю. Хачай, В. М. Кисляк, И. Э. Гимади, научные сотрудники Института математики и механики УрО РАН, Института экономики УрО РАН, Уральского государственного университета.

Подчеркнем: задача проекта – фундаментальные исследования, это – требование РФФИ. И мы разрабатываем математическую проблематику.

И в то же время наши алгоритмы напрямую применимы к практическим экономическим, социальным и экологическим задачам Урала. Решены и задачи из области медицины. Создано программное обеспечение. И в его основе – тоже фундаментальные информационные технологии.

Нами построены и апробированы математические модели:

– сравнения территорий и других экономических систем (например, предприятий) по комплексам признаков (т. е. нахождения формальных критериев их сходства и различия, эти критерии описаны конкретными математическим формулами, полученными по результатам обработки наблюдательных данных);

– определения объективного места данной территории во множестве других территорий, в многофакторном пространстве признаков;

– обучения целесообразной диагностике территорий (это задача дискриминантного анализа, в рамках этой задачи идет обучение диагностике на основе примеров объектов из разных классов или групп);

– разбиения территорий на однородные части или группы (это автоматическая классификация, или таксономия, или кластерный анализ);

– поиска латентных или скрытых, не лежащих на поверхности, факторов различия и сходства территорий.

Для задач, отвечающих этим моделям, нами разработаны алгоритмы их решения. Это новые алгоритмы оптимизации, распознавания образов, нейронных сетей и факторного анализа.

Потребовалось исследование новых свойств решающих правил выбора вариантов, правил диагностики, различения и идентификации территорий, таких, например, как свойства принятия решений большинством голосов экспертов или их имитаций, симуляций работы экспертов. Обнаружены новые эффекты коллективных правил принятия решений.

На этой задаче опробован ряд алгоритмов, в том числе обучающихся и самоорганизующихся алгоритмов распознавания и нейросетевых методов.

Разработано программное обеспечение: КВАЗАР+ и КВАЗАР – Toolkit.

В качестве полигона для отладки алгоритмов взята конкретная информация по экономическому развитию регионов Урала, просчитаны варианты таксономии. Таксономия объектов – это их группировка, разбиение на группы близких по какому-либо критерию объектов. Критерий – не один показатель. Не одна характеристика, а целый их комплекс. Группировка (таксономия, кластеризация) объектов по похожести их характеристик или признаков упрощает решение задач анализа данных, нахождения эмпирических закономерностей. Например, вместо того, чтобы анализировать большое множество объектов, чтобы наглядно увидеть картину их расположения в пространстве большого количества факторов, мы после проведения таксономии можем работать с типопредставителями таксонов, тогда картина распределения объектов в пространстве факторов станет прозрачной – мы явно увидим эмпирические закономерности.

Апробация методов прошла на примере задачи анализа состояния и развития регионов за 1993–1998 годы. По каждому региону фиксировались 32 годовых показателя: по демографии, промышленности, сельскому хозяйству, транспорту, доходам населения. Были пропуски данных – это обычная вещь в наблюдательных данных. Пропуски заполнялись на объективной основе – с помощью наших методов распознавания образов. В результате выявлены группы сходных по всей совокупности показателей регионов – получена древовидная кластеризация. Выявлены информативные показатели: доходы и расходы населения, заработная плата, удельный вес городского населения и др.

Итак, математический аппарат готов для решения актуальных задач экономики и экологии Урала. Он развивается и дальше. И какие же конкретные проблемы он поможет решить специалистам, которые возьмут его на вооружение?

Эти методы позволяют свести воедино разнородные факторы: социальные, экономические, природные, рассмотреть их в совокупности и выявить эмпирические закономерности: почему регионы с близкими показателями демонстрируют разные результаты хозяйственной деятельности? Тогда можно сказать, на какие факторы надо повлиять, чтобы улучшить качество работы регионов. Далее, удается выявить скрытые группирования территорий в различных разрезах факторного пространства, скрытые группы взаимодействующих факторов и латентных параметров.

С содержательной точки зрения речь идет о корреляции (или другом виде связи) между социальными, экономическими и природными характеристиками для разных территорий и пунктов и разных объективно существующих кластеров, которые могут быть неявными, но все равно реально выявляемыми – для этого мы и разрабатываем средства многомерного многофакторного анализа данных. Скрытые факторы могут влиять на реальную экономическую и социальную динамику.

Это ведет к получению объективных оценок территорий. Кстати говоря, понятие объективно обусловленных оценок идет от линейного программирования. Оно введено нобелевским лауреатом Л. В. Канторовичем. Суть его – в вычислении вариаций результатов экономической деятельности при вариациях факторов. И вот теперь мы выяснили, что можно этот подход дополнить другим – идущим от обобщения данных наблюдений. Это само по себе интересно – как совпадение результатов модельно-аналитического и эмпирического подходов.

Заметим, что применяемые нами методы связаны с индукцией. Поэтому взглянем на суть индукции внимательнее.

Индукция

Индукция, экстраполяция, интерполяция – принципиальные средства для прогнозирования. Эти процедуры важны в обработке данных и знаний.

Проблема индукции такова: как объяснить возникновение нового знания? Как обосновать возникновение знания?

Подходы к этому известны: теория вероятностей[1], нейронные сети. И есть много философских концепций, а также фундаментальный подход – исследование индуктивных логик, логик индуктивного вывода.

Проблему индукции называют проблемой Д. Юма, который отрицал объективную причинность, а вместо нее выдвигал ассоциацию идей.

Ассоциацией идей механически занимаются и искусственные нейронные сети (в слоистых сетях есть блок ассоциативных формальных нейронов), но для человека такая крайняя точка зрения является явным преувеличением. В эмпирических исследованиях нам приходится делать гипотетические переходы от следствий к возможной причине, и это не сводится только к ассоциации идей. В дальнейшем мы проверяем степень объективности делаемых гипотез.

Вообще, схема индукции такова. Мы наблюдаем некоторые факты и предполагаем, что они вытекают из некоторой общей (может быть, скрытой, глубинной) причины. И мы ищем утверждение, из которого формально следуют эти факты. Так обстоит дело, например, в факторном анализе: мы ищем латентные факторы, через которые выражаются поверхностные признаки объектов.

В наше время в связи с формализацией процессов вывода следствий из данных и знаний (в том числе процессов индуктивного вывода) на первый план выходят такие конкретные вопросы экспертных систем, как устойчивость вывода, а также способы обработки противоречивых данных. В конечном счете нас интересует их интерпретации (которая, как правило, неоднозначна, многовариантна). Работа с противоречивыми задачами связана с особенно интересными вопросами логического вывода и понимания. Эти вопросы изучались нами в рамках комитетного подхода (при использовании коллективных решений вместо точечных). Кроме того, в мировой литературе заметное место занимают работы по многозначным (в некотором смысле противоречивым) логикам, это направление идет от казанского логика Н. А. Васильева. В этой связи важны оценки устойчивости вывода следствий и индуктивного вывода. Этот вопрос связан двойственными моделями логического вывода и выбора вариантов решений.

Противоречивые задачи управления, выбора, диагностики и прогнозирования реально возникают в текущей практике принятия решений. Они требуют уточнения смысла логического вывода и понимания. Противоречия возникают в случае сложности объекта, неполноты знаний о нем, неопределенности и несогласованности критериев оценки его функционирования. В этом случае применимы методы индуктивного вывода по прецедентам.

В случае противоречивых задач индуктивного или дедуктивного вывода можно размывать противоречия с помощью многозначных интерпретаций противоречивых или несогласованных данных. Специфика этих ситуаций в том, что в качестве формальных следствий можно вывести противоположные высказывания. Тогда нужен особый аппарат, ограничивающий цепочку следствий из данных, заменяющий шаг, на котором получаются взаимоисключающие следствия, шагом формирования многовариантности следствий. Многое в этом направлении позволяет сделать развитие информатики.

Математика – информатика – моделирование

Академик Н. Н. Красовский понимает информатику как автоматизацию рассуждений, вычислений, геометрических построений и т. д.[2] Он считает важной реализацию полной цепочки использования компьютеров: практическая проблема – математическая модель – алгоритм – программа – имитация решения – анализ результатов.

При этом в обработке задач принципиально важно моделирование неформализованных ситуаций. Это истинно творческая сторона информатики, здесь лежит грань между естественным и искусственным интеллектом. Н. Н. Красовский считает, что моделирование неформализованных ситуаций предохраняет от «полного поглощения естественного мироощущения мироощущением телевизионно-компьютерным». Математическая модель – карикатура реальности, и это – позитив: карикатура позволяет анализировать, оттенять важные признаки реальности.

Неформализованной является красота математических построений. Эстетичность математики исследовали многие авторы. Есть ряд обзоров[3]. Хотя, по И. Канту, красота познается без посредства понятия, можно тезисно рассмотреть соответствующие критерии, наводящие на определенные закономерности:

1. Ощущение прекрасного возникает в момент озарения и прорыва в поиске научной истины.
2. Красота – преодоление сложного.
3. Это сведение сложного к простому.
4. Неожиданность, удивительность, нетривиальность.
5. Экономичность и продуктивность методов.
6. Общность результатов, красота как единство в многообразии.
7. Симметрия в математических конструкциях.

Но это – некоторое отвлечение от нашей темы. А как же все таки выглядит общая схема учета неформализованного материала в экспертных системах?

Общая модель

В экспертных системах знание составлено из фрагментов, более или менее согласованных. Каждая частная теория моделирует какую-то свою область наблюдений или свой аспект реальности. Тогда в этой области наблюдений можно делать прогнозы и сверять их с действительностью. А остальные области наблюдений либо вообще никак не учитываются, либо представляются просто некоторыми массивами чисел.

При таком синтезе приходится развязывать противоречия стыковки различных моделей.

Можно использовать различные способы развязки противоречий в противоречивых формальных системах. Варианты способов «развязки» противоречий предложены математиками. Например, метод наименьших квадратов, метод чебышевских приближений, метод комитетов (коллективных решений), методы для несобственных задач оптимизации и классификации.

Оказывается, моделирование – это глубокие нетривиальные вычисления. И реальность связана с компьютерами.

Существуют сложные и автономные абстрактные категории, они – часть структуры реальности. Существуют логически необходимые суждения об этих категориях, они составляют предмет математики. Но эти истины невозможно знать определенно. Доказательства не дают их выводам определенность. Обоснованность доказательства зависит от истинности наших теорий о поведении объектов, с помощью которых мы осуществляем доказательство. Значит, математика зависит от физики. Постижимые математические истины – это в точности то бесконечно малое меньшинство, которое можно передать в виртуальной реальности. Но непостижимые математические истины тоже существуют, так как они сложным образом появляются в наших объяснениях постижимых категорий. И один из важнейших вопросов – как понимать бесконечность в математике, поскольку бесконечность также присутствует в моделях.

Бесконечность в современной математике

Сейчас, пожалуй, наиболее непосредственно востребованное направление в математике – компьютерные науки. И современное понимание бесконечности происходит через компьютер. Сейчас важны скорее не гладкие многообразия, а дискретное. Числа с точностью до определенных знаков после запятой. Не структуры, а конкретные числа. Мы работаем с громадными наборами чисел.

Нет смысла в бесконечностях – их заменили объемные числовые массивы. Сейчас математика – экспериментальная наука, она работает с реальными практическими числами. Как в Древнем Египте. Но по-другому. Например, фрактальная математика. Нужна ли актуальная бесконечность при такой мощности компьютеров?

Аристотель представлял трудности и противоречия при работе с понятием актуальной бесконечности.

В теории множеств есть факты, которые неотягощенному теорией уму представляются странными: что любой как угодно малый отрезок прямой содержит бесконечно большое число точек, и он эквивалентен любому как угодно длинному отрезку – этому наш здравый ум упорно сопротивляется. И парадоксы Зенона – действительно парадоксы.

Аристотель допускал потенциальную бесконечность. Но в основе мироощущения греков – то, что конечное есть основа мира. Мир греков – геометрия, где фигуры конечны и обозримы. Они зрительно даны во всей конкретности. В Средние века произошел переход к христианству. Появилась рефлексия бесконечного (Бог – Отец). В средневековой математике отрезок – это кусок, отрезанный от бесконечной прямой.

И вот появились бесконечно малые и бесконечно большие величины – уже у Галилея. Это принятие актуальной бесконечности, а через это – и принятие соответствующих парадоксов. Разложение линии на бесконечное число точек стало восприниматься как вполне нормальный процесс – через предельный переход. Как окружность – это многоугольник с бесконечным числом сторон.

Затем Кантор с теорией множеств, и все было прекрасно до момента обнаружения ужасных противоречий. И канторова теория множеств стала называться наивной, и канторово восхождение по лестнице бесконечностей как восхождение к божественной благодати прекратилось. Остановилось новое Средневековье. Все возвратилось на круги своя – но в новом виде. Через компьютеры. И сейчас мы вернулись к актуальной конечности греков. Окружность конечна у греков, актуально бесконечна у Галилея, фрактальна – у нас. Бесконечность же все время возникает, она неуничтожима, она в непознанном, в неформальном. Мы опять в начале пути, над ним сияет звезда бесконечности. И опять возникают фундаментальные вопросы.

Фундаментализм

Фундаменталисты интересуются проблемами сущности математики (а не ее функционирования), и поневоле идут к статике, а не к динамике. Имеет место любовь к инвариантам. Их (и нас) интересует природа математических объектов, критерии истинности математического знания. Важны абсолютные основания математики, важна суть математических доказательств. Так что все ведет к математической логике. Истоки – в платонизме, в вечных идеях.

Нефундаменталисты изучают процессы функционирования математики, так что для них естественно видеть тенденции развития. И в какой-то степени динамика математики автономна от развития метаматематики. В качестве примера можно привести применение компьютеров в математических доказательствах.

В. А. Успенский в 1985 году на одной из конференций размышлял о сущности математики. С тех пор ситуация несколько изменилась, но многое из того, что он отметил, характерно и для настоящего времени. Есть мифы, которые он развеял: 1) в математике все строго определяется; 2) в математике все строго доказывается из аксиом; 3) математика трудно понимаема.

Математика – живая наука, она меняется в соответствии со временем. Но меняется серьезно, не отменяя предыдущих конструкций, а осмысливая и переосмысливая их. Жизненная необходимость заставляет понимать те разделы математики, которые связаны с нашей непосредственной деятельностью. Компьютеры порождают в этом отношении новые обоснованные надежды. Но вместе с тем они приносят и новые фундаментальные проблемы. И это было всегда, и сейчас – как всегда.

---

[1] *Кайберг Г.* Вероятность и индуктивная логика. М., 1978.

[2] *Красовский Н. Н.* Математическое моделирование в школе // Известия УрГУ. 1995. № 4.

[3] *Шеврин Л. Н.* Об эстетичности математики // Известия УрГУ. 1995. № 4.